

TD 20 : Calcul matriciel Indications

Produit de matrices

1 ★ Trouver tous les produits matriciels possibles parmi les matrices suivantes et les calculer.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Prendre une matrice pour commencer (par exemple X) et regarder tous les produits possibles en se basant sur les tailles des matrices.

2 ★★ Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

J^2 . En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

En exprimant J^2 en fonction de J , déterminer une formule pour J^k et la montrer par récurrence.

3 ★★ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la puissance k -ième des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances k -ièmes pour de petites valeurs de k , conjecturer une formule et la montrer par récurrence.

4 ★★ (Classique !) Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer N^k . En déduire A^k .

2) On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{cases}$$

3) On pose la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Donner une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n .

4) En déduire les valeurs de u_n, v_n, w_n .

1) Pour A , utiliser la formule du binôme.

4 La relation qui relie U_{n+1} et U_n ressemble aux suites géométriques. Cela permet de déduire la valeur de U_n .

5 ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

Poser $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

6 ★★★ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$. On procède par analyse-synthèse et on considère une solution X de cette équation.

1) Montrer que X commute avec A .

2) En déduire que certains coefficients de X sont nuls. Conclure.

1) Utiliser le fait que $A = X^2$.

2) Poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Matrices et algèbre

7 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} . B est l'inverse de A si et seulement si $AB = I_n$, si et seulement si $BA = I_n$.

8 ★★ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire

que A est inversible et déterminer A^{-1} .

B est l'inverse de A si et seulement si $AB = I_3$. Réécrire l'égalité trouvée à partir du calcul de $A^2 - 3A + 2I_3$ pour faire apparaître B .

9 ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A +$

$I_3)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

B est l'inverse de A si et seulement si $AB = I_3$. Réécrire l'égalité trouvée à partir du calcul de $(A + I_3)^3$ pour faire apparaître B .

10 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est un diviseur de zéro de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A n'est pas inversible.

Raisonner par l'absurde.

11 ★★ On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- 1) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.
- 2) Est-ce un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?

1) Existe-t-il un groupe usuel qui contient G pour $\times$?
Pas certain...

2) A-t-on $G \subset GL_2(\mathbb{R})$.

12 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = I_n$. On pose

$$E = \{pI_n + qA \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Montrer que c'est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13 ★★★ On définit le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$Z = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA\}$$

Montrer que $A \in Z$ si et seulement si A est une matrice scalaire. *Indication : on pourra considérer les matrices élémentaires.*

On note $E^{k\ell}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $[E^{k\ell}]_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$. Soit $A \in Z$. Que peut-on déduire de l'égalité $AE^{k\ell} = E^{k\ell}A$?

Matrices (anti)symétriques

14 ★ Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B commutent.

Utiliser la définition et les propriétés de la transposée.

15 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^\top A$.

- 1) Montrer que B est une matrice symétrique.
- 2) Montrer que les coefficients diagonaux de B sont positifs.
- 3) Montrer que si $B = 0$, alors $A = 0$.

2 Utiliser la formule de $[MN]_{ij}$ pour un produit de deux matrices M et N .

16 ★★★ (Classique) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + S$. *Indication : raisonner par analyse-synthèse.*

Utiliser $\begin{cases} M = A + S \\ M^\top = \dots \end{cases}$ pour en déduire l'expression de A et de S en fonction de M .

17 ★★★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M = I_n$. Montrer que M est inversible. Puis que M commute avec $M^\top$. Enfin, montrer que M est symétrique.

Faire bien chaque question dans le bon ordre. Exploiter aussi le fait que si $A = B$, alors $A^\top = B^\top$...